

國立臺灣大學機械工程學系 101 學年度
大學甄選入學綜合評量筆試試題

作答注意事項：

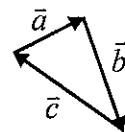
1. 考試時間為 100 分鐘
2. 不得參考圖書等資料
3. 題目共有 5 大題，請儘量作答，滿分為 100 分
4. 請在另附的試卷上作答
5. 第 4 大題為單選，請於【選擇題作答區】作答
6. 本試題紙須隨試卷繳回

**國立臺灣大學機械工程學系 101 學年度
大學甄選入學綜合評量筆試試題**

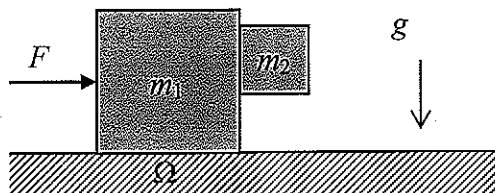
*考試時間：100 分鐘
不得參考圖書等資料

- 請注意： 1. 題目共有 5 大題，請儘量作答，滿分為 100 分。
2. 請在另附的試卷上作答。
3. 本試題紙請務必隨試卷繳回。

1. (1) (5%) 若 (x, y) 為圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上之點，則 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 將此圓映射成另一曲線，試求該曲線之方程式。此方程式所代表之幾何圖形為何？
- (2) (5%) 設函數 $\begin{cases} f(x) = 4x(1-x) \\ h(x) = \frac{1-\cos x}{2} \end{cases}$ ，若 $f(h(x)) = h(g(x))$ ，且已知 $g(0) = 0$ ，則函數 $g(x)$ 為何？
- (3) (5%) C 為實數，試求方程式 $x^3 - 6x^2 + C = 0$ 有 3 個實數根之 C 的範圍。
- (4) 向量內積(inner product or dot product)的定義為 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ ，定義向量外積(cross product)的大小為 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ ，(符號 $|\quad|$ 代表向量的大小， θ 為向量 \vec{a} 與 \vec{b} 之間的夾角， $0 \leq \theta \leq \pi$)
- (a) (2%) 證明 $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ ；
- (b) (3%) 若 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 三向量首尾相連接成三角形(如右圖)，且已知 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ ， $\vec{b} \cdot \vec{c} = -6$ ， $\vec{c} \cdot \vec{a} = -3$ ，試求 $|\vec{a} \times \vec{b}| = ?$ ， $|\vec{b} \times \vec{c}| = ?$ ， $|\vec{c} \times \vec{a}| = ?$



2. 如下圖所示，質量分別為 m_1 及 m_2 的均質方形木塊，木塊之間接觸的靜摩擦係數為 μ_s 、動摩擦係數為 μ_k ；重力場向下，重力加速度為 g 。在一固定水平推力 F 的作用下，此二木塊所組成的系統在一平面(Ω)上滑動。試問
- (1) (5%) 若平面 Ω 為光滑表面，則欲維持 m_2 木塊等速落下， m_1 木塊施加在 m_2 木塊上的合力值為何？
- (2) (5%) 承(1)小題，若欲維持 m_2 木塊等速落下，所需的 F 值為何？
- (3) (5%) 若平面 Ω 為粗糙表面，其與 m_1 木塊接觸的動摩擦係數為 μ_Ω ，則欲使 m_2 木塊不致落下， m_1 木塊施加在 m_2 木塊上的最小合力值為何？
- (4) (5%) 承(3)小題，欲使 m_2 木塊不致落下，所需 F 的最小值為何？

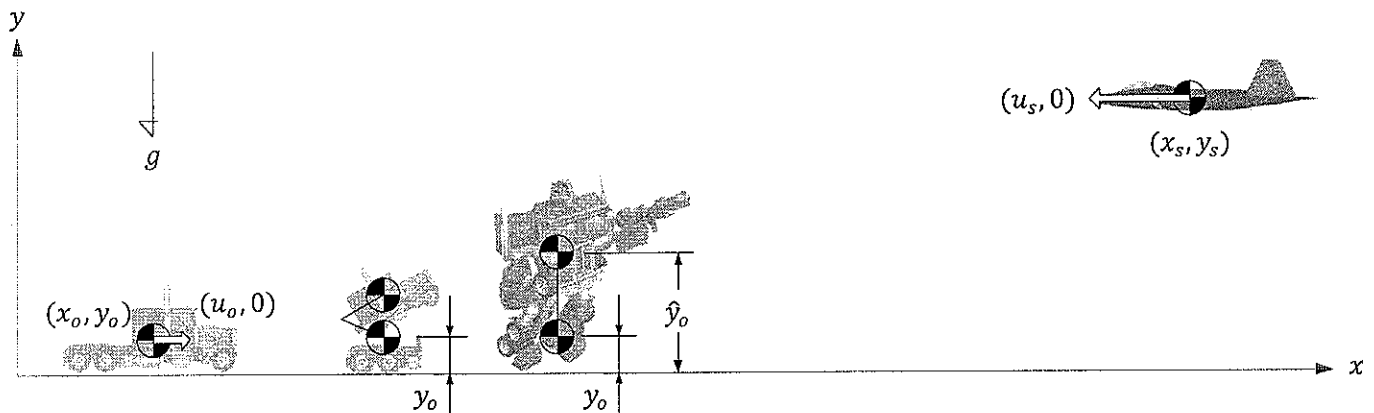


國立臺灣大學機械工程學系 101 學年度
大學甄選入學綜合評量筆試試題

*考試時間：100 分鐘
不得參考圖書等資料

3. 變形金剛題組

如下圖所示，在地球重力場中（重力加速度 g ），柯博文（Optimus）因任務需要，以卡車型態等速行駛於高速公路上，對地速度為 $(u_o, 0)$ 。當其質心位置移動到 (x_o, y_o) 的瞬間，發現天王星（Starscream）在空中位置 (x_s, y_s) ，以飛機型態等速水平飛過來，對地速度可表達為 $(u_s, 0)$ （注意 $u_s < 0$ ），並假設之後飛行保持水平等速。當下，柯博文 決定跳起來攔截天王星。

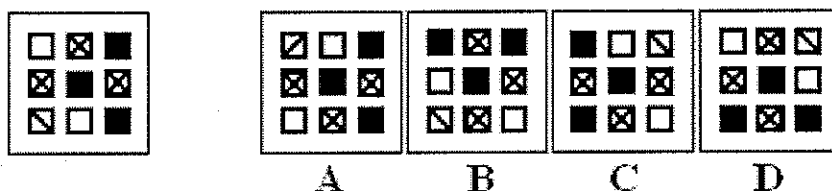


假設柯博文 需要經過 t_o 秒完成變形後，才能跳起。柯博文 的身體由質量為 m_1 的上半身與質量為 m_2 的車底盤兩個部分組成，在卡車型態下這兩個部分的質心重合，兩者間以可忽略質量之連桿相連。在變形過程中，車底盤質心保持水平等速運動，上半身質心水平速度不變，但具有垂直速度逐漸往上移動。在 t_o 秒完成變形時，上半身質心 y 座標移動至 y_o ，且車底盤因連桿被拉直而瞬間被拉起，產生和上半身一致的運動速度，開始了柯博文 的跳躍動作。起跳後，假設柯博文 上半身和車底盤相對位置保持和起跳時相同。試計算下列項目：

- (1) (5%) 連桿拉直後的起跳瞬間，柯博文 整體的質心位置 $(x_{o, COM}, y_{o, COM})$ ；
- (2) (5%) 若柯博文 想攔截到天王星，起跳瞬間整體質心所需的速度（包含大小 V_a 及仰角 θ_a ）；
- (3) (5%) 承上題，柯博文 在下方車底盤被拉起的前一瞬間，上半身所需垂直速度 v_1 ；
- (4) (5%) 承題(2)，柯博文 攔截到天王星 的瞬間整體質心的動能 E_s 。

4. 單選題

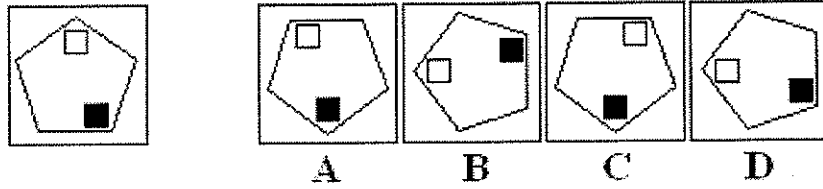
(1) (4%) 以下四個圖經平面旋轉後，哪一個和最左邊的圖是同一個？



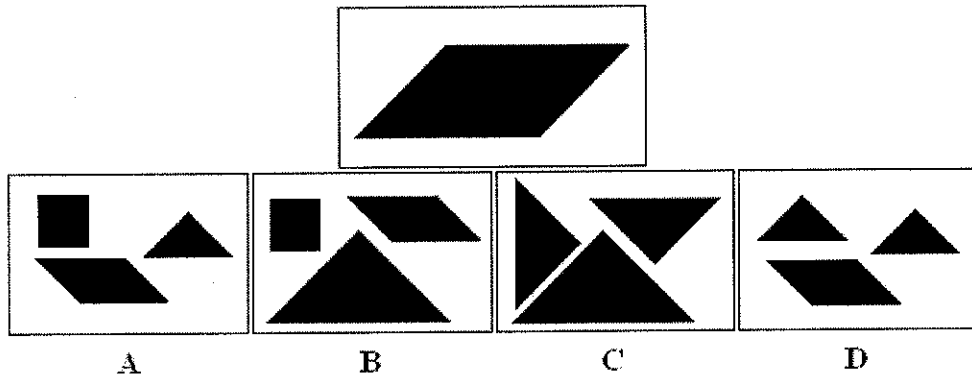
國立臺灣大學機械工程學系 101 學年度
大學甄選入學綜合評量筆試試題

*考試時間：100 分鐘
不得參考圖書等資料

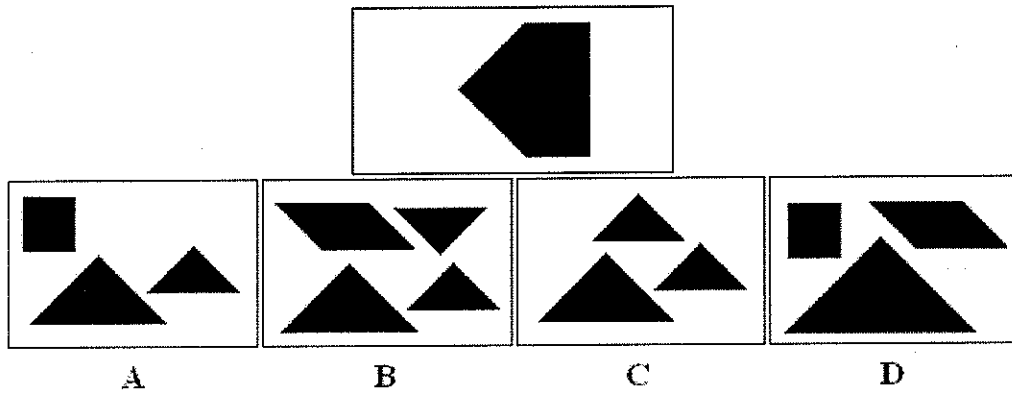
(2) (4%) 以下四個圖經平面旋轉後，哪一個和最左邊的圖是同一個？



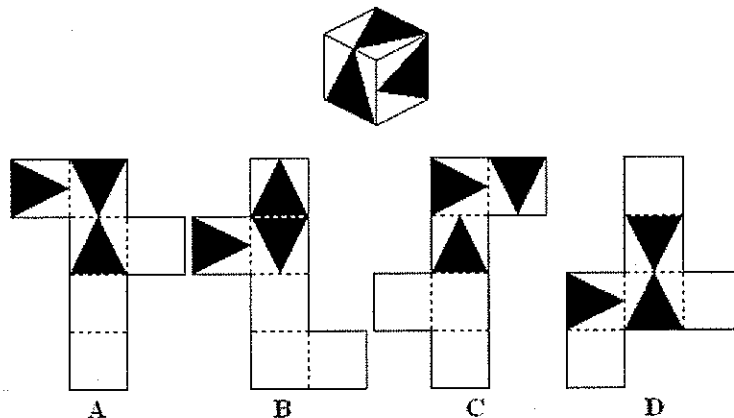
(3) (4%) 以下哪一組圖組，可排列成所示之圖？



(4) (4%) 以下哪一組圖組，可排列成所示之圖？



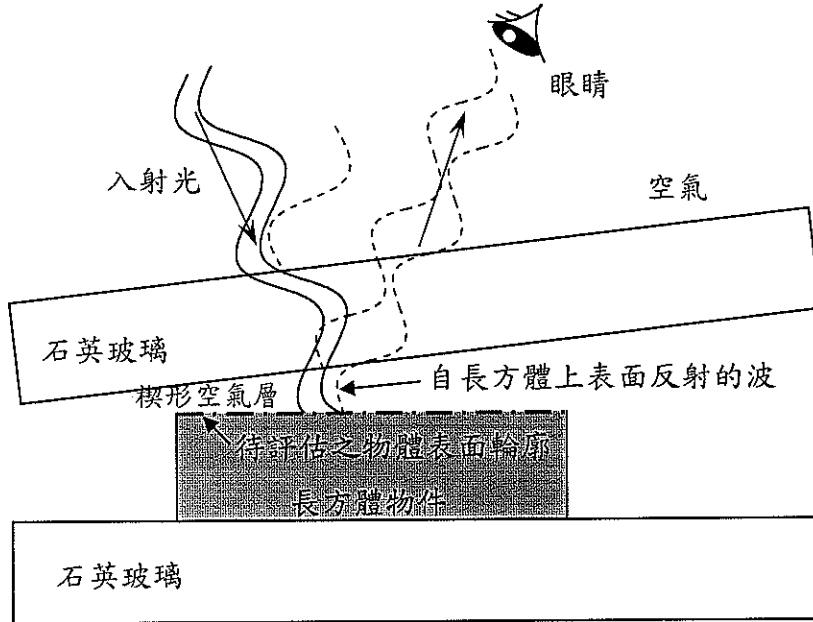
(5) (4%) 以下四個圖，哪一個可摺成所示之立方體？



國立臺灣大學機械工程學系 101 學年度
大學甄選入學綜合評量筆試試題

*考試時間：100 分鐘
不得參考圖書等資料

5. 如下圖所示，當一個單色光平行入射於兩塊圓形石英玻璃上方，其中心波長為 λ ，每一個石英玻璃之上下平面相互平行，且其表面為理想的平面，石英玻璃之折射率為 n 。此時，在兩塊石英玻璃的中間，置入一個上表面輪廓待評估的長方體物件，上石英玻璃與長方體物件之間留一個極薄之楔形空氣層，如下圖所示。



- (1) (5%) 請說明眼睛所觀察到光干涉條紋的產生原理。
- (2) (5%) 若將光源換成白光照射，請說明眼睛所觀察到光干涉條紋，有何變化？為什麼？
- (3) (10%) 承題(1)，下圖為眼睛所觀察到長方體物件上表面的光干涉條紋情況，請由下列立體圖示選擇其輪廓的可能形貌，並簡述其光干涉條紋形成原因。

