國立台灣大學 機械工程學系

98 學年度大學甄選入學綜合評量筆試試題

請注意：1. 題目共有 5 大題，每大題 20 分，滿分為 100 分。

2. 請在另附的試卷上作答。

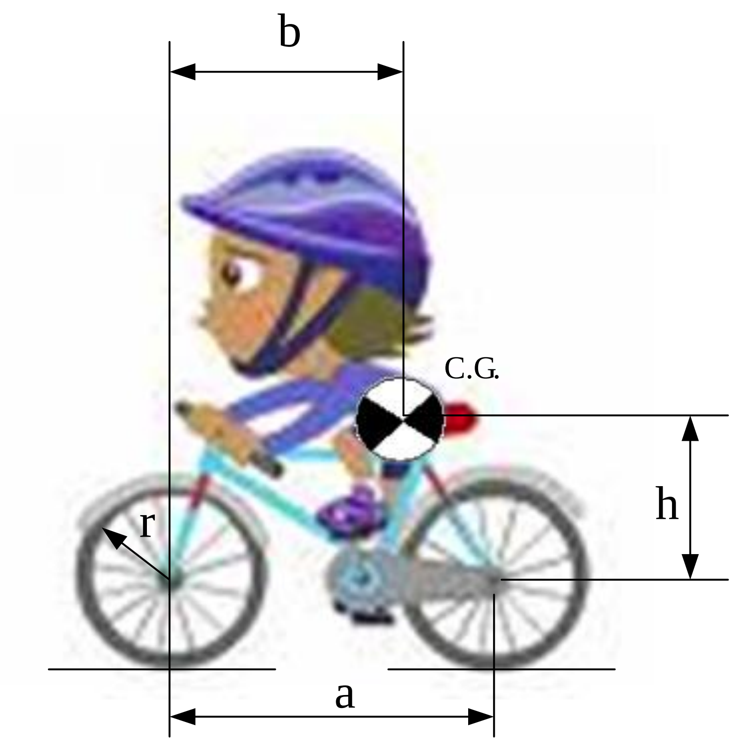
3. 本試題紙請務必隨試卷繳回。

1. 騎單車時，如果按下前輪的煞車器做為緊急煞車，容易導致單車向前翻滾。假設有一台單車，當人騎上後，人加車的重心(C.G.)距離前輪車軸軸心在水平方向為 b 公尺，距離前輪車軸軸心在垂直方向為 h 公尺，車輪半徑為 r 公尺，前後輪中心距為 a 公尺，重力加速度為 g 公尺/秒^2。今有一選手加車重 m 公斤

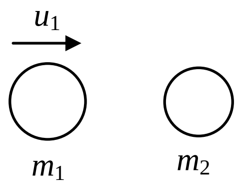
 (1) (6%)騎在車上時，前後輪與地面接觸點的受力為何?

 (2) (8%)在比賽途中，突然有人闖入車道，選手只緊急按下前輪的煞車器，車子迅速在 0.8 秒內自時速 50 公里等減速停止(假設煞車過程，車輪胎與地面沒有打滑)，如果車子不致向前翻滾，請問 b 與 h 的關係應如何? 設 $r=0.25$ 公尺， $m=60$ 公斤

 (3) (6%)選手的體重會影響向前翻滾與否嗎?為什麼?



2. (1) (5%)甲科學家認為可以由質點的碰撞產生高速運動的質點。我們要討論這個想法的可行性。參考右圖，在沒有外力作用下，質量 m_1 速度 u_1 的質點和質量 m_2 的靜止質點碰撞。假設碰撞的過程中沒有能量損耗，碰撞後 m_1 、m_2 的速度分別為 v_1 、v_2 。請證明

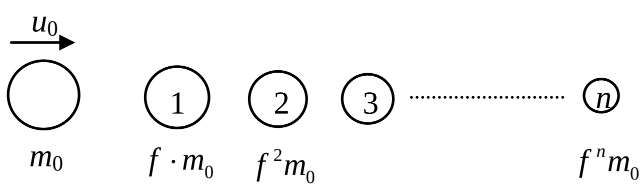


$$v_1 = \frac{1-r}{1+r}u_1 \text{，} v_2 = \frac{2}{1+r}u_1$$

其中 r 代表 m_2 和 m_1 的比值（$r = m_2 / m_1$）。

(2) (5%) 由(1)的結果可以看出 r 越小，v_2 的值越大。請證明 v_2 的上限為 $2u_1$，而且當 v_2 逼近 $2u_1$ 時，m_2 的動能和入射質點的原動能（$m_1 u_1^2 / 2$）的比值約為 $4r$。由此可知，v_2 逼近 $2u_1$ 時，碰撞後 m_2 的動能遠小於入射質點的原動能。

(3) (5%) 顯然甲科學家的想法無法產生高速運動且具有高動能的質點。於是乙科學家提出下面的構想：利用一系列的碰撞來產生高速的質點。參考下圖，入射質點 m_0 的速度為 u_0，第一個質點的質量為 $f \cdot m_0$，第二個質點的質量為 $f^2 m_0$，以此類推，第 n 個質點的質量為 $f^n m_0$。除了入射質點外，其餘質點碰撞前都為靜止。



假設碰撞過程中沒有外力作用，也沒有能量損失，請問第 n 個質點碰撞後的速度為何？其動能和入射質點原動能（$m_0 u_0^2 / 2$）的比值為何？（請將結果表為 f 的函數）

(4) (5%) 承上題，請問為了使第 n 個質點碰撞後能兼有速度（$> 2u_0$）和能量（$\approx m_0 u_0^2 / 2$），f 的值應為：遠大於 1、略大於 1、略小於 1、或者遠小於 1。請簡單說明理由。

3. 質數 (prime number) 在數學上是很特殊的數字，如果一個數字不能被除了 1 及其本身以外的任何整數整除，這個數字就稱之為質數。而尋求質數的過程，也在數學的發展史上佔有重要的地位。本題將討論一些質數的性質。首先，尋找質數最直接而簡單的方法是“刪除法”，也就是將所有的整數列出來，先將 2 (已知 2 為質數) 的倍數刪除掉，於是知道下一個質數為 3，再將 3 的倍數刪除掉，於是知道下一個質數為 5，以此方式依序刪除掉已知質數的倍數，如下所示，可知 11~30 之間的質數有 11, 13, 17, 19, 23, 29。

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

/ , \ and × :divided by 2, 3 and 5, respectively.

(1) (5%)所謂的 *twin prime* 是指兩個相鄰的奇數皆為質數，例如 (3，5)、(5，7) 以及 (11，13)；已知第四組 *twin prime* 是介於 31~100，試找出第四組 *twin prime*。

(2) (5%)雖然“刪除法”很簡單，但卻缺乏效率，於是數學家試著提出各種尋找質數的方程式。在十八世紀時尤拉 (Euler) 提出一個公式 $f(n) = n^2 + n + 1$，將 n=1~15 代入，f 皆為質數，證明 $f(16)$ 不是質數。

(3) (5%)美國職棒大聯盟之前的全壘打記錄為貝比魯斯 (Babe Ruth) 於 1935 年締造的 714 支，此記錄一直到 1974 年 4 月 8 日才被漢克阿儂 (Hank Aaron) 的第 715 支全壘打打破。事實上 714 及 715 這兩個數字與質數有非常密切的關係，數學家稱之為 *Ruth-Aaron pairs*，具有特殊的性質。首先，714 可以表示為 4 個質數 (稱之為 714 的質因數) 的乘積，而 715 可以表示為 3 個質數 (稱之為 715 的質因數) 的乘積，試證明 714 及 715 滿足以下兩個性質：

i. (714 的質因數總和) = (715 的質因數總和)。

ii. 714×715=最小的 7 個質數相乘。

(4) (5%)事實上，在個位數 (1~9) 中剛好有兩個數字是 *Ruth-Aaron pairs* (亦即其彼此的質因數總和相等，且此兩數字相乘剛好是最小的幾個質數相乘)。請問這一組 *Ruth-Aaron pairs* 是什麼？

4. 任何一組 n 個隨機抽取的數值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 算術平均數為 $\bar{x}$，標準差為 s_x，與任何一組 n 個隨機抽取的數值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 算術平均數為 $\bar{y}$，標準差為 s_y，做結合運算。假使 X 系列與 Y 系列完全無關，則任何一個 X 系列之數值 x_i 與任何一個 Y 系列之數值 y_j 之和的算術平均數為 $\bar{x}+\bar{y}$，之差的算術平均數為 $\bar{x}-\bar{y}$，不論是和或是差的標準差皆為 $\sqrt{s_x^2+s_y^2}$。自然界和人類社會中的許多現象，例如人的血壓、脈搏、身高、體重等的分佈情形，都和常態分佈近似，常態分配為一對稱型分配，在平均值上下一個標準差，所包括之機率約為 68%，平均值上下二個標準差，所包括之機率約為 95%，在平均值上下三個標準差，所包括之機率約為 99.7%。請利用以上的資訊，回答下列的問題：

(1) (7%)小明想了解自己體重的分配，每天於早午晚量測自己的體重，經過一個月後，小明算得自己的體重平均值為 67kg，標準差為 1kg。請將小明之體重分佈曲線畫出，並請標明平均數與 1 個、 2 個和 3 個標準差範圍內的大約機率。

(2)(6%)經由一段時期實驗，小華得知自己的體重平均值為 85kg，標準差也為 1kg。有一天，小明與小華一起去乘船遊湖，請問他們所乘的船至少需承載何種重量的分佈，即此重量的平均值與標準差各是多少和此重量為何種分佈？

(3)(7%)目前搭乘的交通工具，除了有台鐵，還有高鐵與捷運都是屬於軌道車輛。軌道車輛在交通管制上採取全程監控，需時時調整車輛行車間距，以避免追撞。試想如果在一個沒有監控行車間距的軌道上，一輛火車先行 10 公里後，第二輛火車再開動，假設二輛火車行駛的速度皆為一具有常態分配，平均值為每小時六十公里，標準差為每小時 7 公里之常態隨機變數，請問在一個小時後第二輛追撞上第一輛的機率大約是多少？

5. (1) (3%)請給攝氏溫標下一定義。

(2) (3%)請以理想氣體為例，說明溫度的微觀物理意義。

(3) (7%)常見測量體溫之儀器包括水銀溫度計及耳溫槍，請說明兩者之基本原理及優缺點。

(4) (7%)何謂三相點，它在溫度量測上有何作用?水的三相點為攝氏幾度?